Beregning af kurvelængden af et symmetrisk stykke af en parabel

Den almene formel for en kurvelængde er:

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Vi sætter c = - d = - b og $f(x) = ax^2 \ \ hvor\ a > \ 0$. Vi får da:

$$S = \int_{-b}^{b} \sqrt{1 + 2a^2x^2}dx = \frac{1}{2a}\int_{-2ab}^{2ab} \sqrt{1 + s^2}ds$$

Her er substitutionen s = 2ax benyttet. Vi får så:

$$S = \frac{1}{2a}\left[\frac{ln\left|s + \sqrt{1 + s^2}\right| + s\sqrt{1 + s^2}}{2}\right]_{-2ab}^{2ab} =$$

$$\frac{1}{4a} \cdot ln\left(\frac{2ab + \sqrt{1 + (2ab)^2}}{-2ab + \sqrt{1 + (2ab)^2}}\right) + \frac{1}{4a} \cdot 4ab\sqrt{1 + (2ab)^2} =$$

$$\frac{1}{2a} \cdot ln\left(2ab + \sqrt{1 + (2ab)^2}\right) + b\sqrt{1 + (2ab)^2}$$

har at gøre med en kasteparabel, er a negativ. Vi kan blot regne med – a i formlen. L = 2b er skridtlængden. Vi kan da udregne a ud fra skridtlængden og løbehastigheden. Vi kan beskrive et løbespring ved:

$$\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} v_x t - b \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_y t \end{pmatrix} \ => \ \binom{x'}{y'} = \begin{pmatrix} v_x \\ -gt + v_y \end{pmatrix}$$

Vi ved, idet T er "svævetiden", at:

$$\binom{x(T)}{y(T)} = \binom{b}{0} = \begin{pmatrix} v_x T - b \\ -½gT^2 + v_y T \end{pmatrix}$$

Heraf fås: $T = \frac{2b}{v_x}$ og $-½g\left(\frac{2b}{v_x}\right)^2 + v_y \cdot \frac{2b}{v_x} = 0 \ => v_y = \frac{gb}{v_x}$.

Til tiden t = 0 er hastigheden: $v_x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{v_y}{v_x} \end{pmatrix} = v_x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{gb}{v_x^2} \end{pmatrix}$.

Vi ved også, at

$$t = \frac{x+b}{v_x} \Rightarrow y = -\tfrac{1}{2}g\left(\frac{x+b}{v_x}\right)^2 + v_y \cdot \frac{x+b}{v_x} \Leftrightarrow$$

$$y = -\frac{g}{2v_x^2} \cdot x^2 + \left(\frac{v_y}{v_x} - \frac{gb}{v_x^2}\right)x + \frac{v_y b}{v_x} - \frac{gb^2}{2v_x^2}.$$

Dette betyder, at tallet a, vi har fra første del, er givet ved $a = \frac{g}{2v_x^2}$ og 2b = L, hvor L er "svævelængden". Vi får da:

$$S = \frac{v_x^2}{g} \cdot ln\left(\frac{gL}{2v_x^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{gL}{2v_x^2}\right)^2}\right) + \frac{L}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{gL}{2v_x^2}\right)^2}$$

L måles i m. v_x er den vandrette hastighed målt i m/s, og $g = 9{,}82\ m/s^2$.

Bent Selchau.