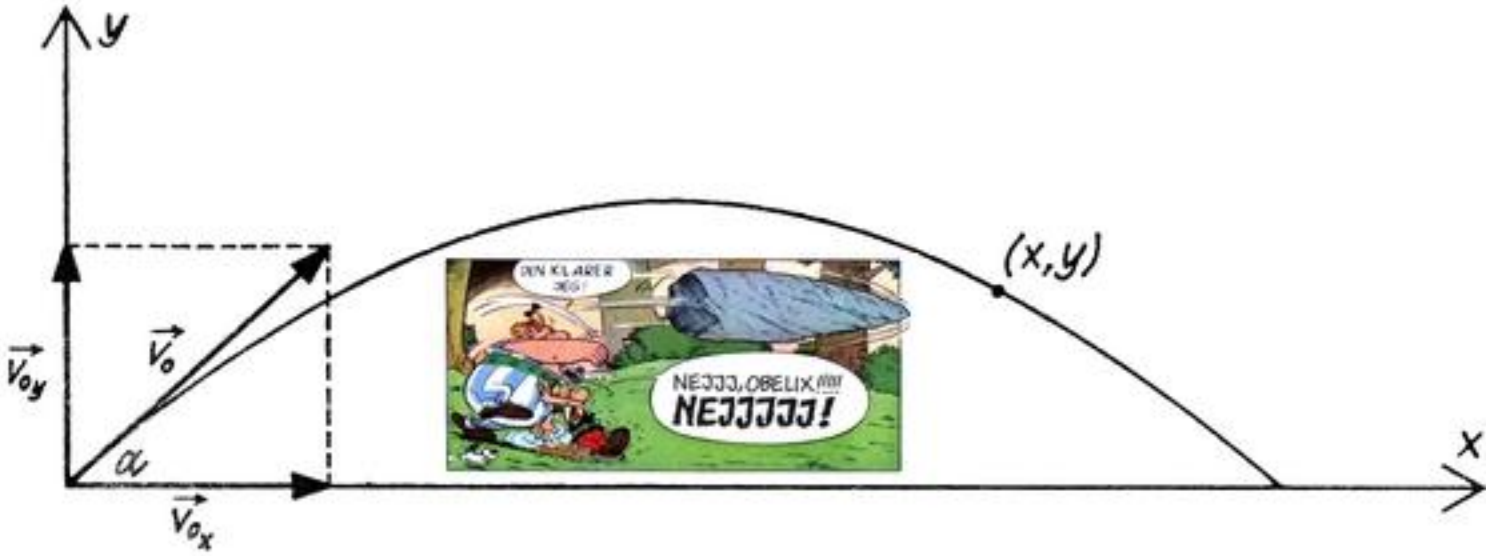
[Print pdf]

Fra en kastebevægelse til et maratonløb

Jeg kaster mig ud i luften 180 gange i minuttet og tænker over hvad der foregår.

Kastebevægelsen.



Det skrå kast ($\vec{V}_0$) af en partikel kan opfattes som sammensat af en vandret bevægelse ($\vec{V}_{0x}$) og et lodret kast ($\vec{V}_{0y}$). Begyndelseshastigheden v_0 ($|\vec{v}_0|$) med vinklen α mod det vandrette plan kan altså opløses i komposanterne v_{0x} og v_{0y} i henholdsvis x- og y-aksens retning.

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$$

Undervejs vil partiklens bevægelse være påvirket af tyngdekraften og luftmodstanden. Ser man bort fra luftmodstanden kan bevægelsen beskrives med vektoren:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{v}_x \\ \vec{v}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos\alpha \\ v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t \end{pmatrix}$$

som angiver partiklens hastighed til tidspunktet t. Hastigheden i x- og y-aksens retning kan også beskrives som $\frac{dx}{dt}$ og $\frac{dy}{dt}$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{v}_x \\ \vec{v}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

Det vil sige at til tidspunktet t vil partiklen være nået til et punkt med koordinaterne:

$$x = t \cdot v_0 \cdot \cos\alpha$$

$$y = t \cdot v_0 \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Af ligningen for x kan t isoleres:

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}$$

sættes dette udtryk for t ind i ligningen for y fås:

$$y = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} \cdot v_0 \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 \Rightarrow y = x \cdot \tan\alpha - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2$$

og indsætter man så $v_x = v_0 \cdot \cos\alpha$ kan ligningen endelig skrives således:

$$y = -\left(\frac{g}{2v_x^2}\right)x^2 + (\tan\alpha)x$$

hvoraf det fremgår at banekurven er en parabelbue!

Kasteviden $x_{\max}$ fås ved at sætte $y = 0 \Rightarrow x_{\max} = \dfrac{-\tan\alpha - \sqrt{\tan^2\alpha}}{-2\left(\dfrac{g}{2v_x^2}\right)} \Rightarrow x_{\max} = \dfrac{2v_x^2 \cdot \tan\alpha}{g}$

Indsættes $v_x = v_0 \cdot \cos\alpha$ kan kasteviden også beregnes som $x_{\max} = \dfrac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}$ og man ser at den maksimale kastevide opnås når $\sin(2\alpha) = 1$

dvs. når vinklen $\alpha = 45^o$: $x_{MAX} = \dfrac{v_0^2}{g}$

Stighøjden findes på det tidspunkt hvor den lodrette hastighed er 0, altså:

$\vec{v}_y = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t = 0 \Rightarrow t = \dfrac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$ som så kan sættes ind i ligningen $y = t \cdot v_0 \cdot \sin\alpha - \dfrac{1}{2} g \cdot t^2$ hvorved man kommer frem til:

$$y_{\max} = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \cdot v_0 \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{g^2} \Rightarrow y_{\max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g}$$

Stighøjden kan også findes ved den halve kastevide, altså hvor $x = \dfrac{v_x^2 \cdot \tan\alpha}{g}$ som så indsættes i ligningen

$y = -\left(\dfrac{g}{2v_x^2}\right)x^2 + (\tan\alpha)x$ og vi får:

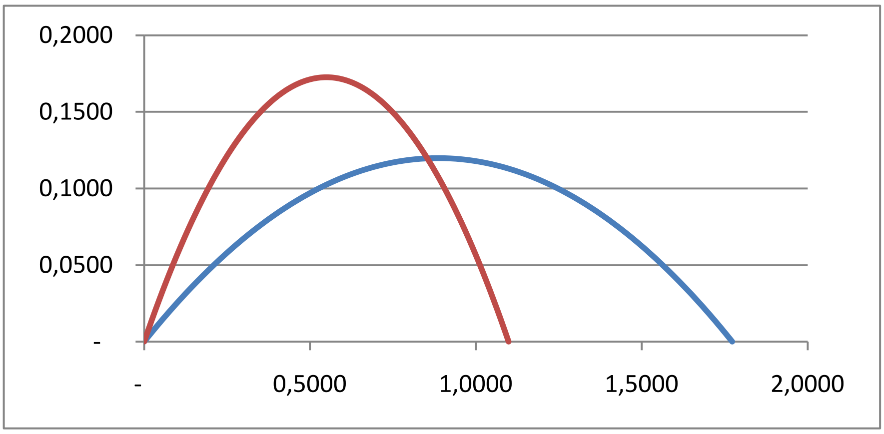
$$y_{\max} = -\left(\frac{g}{2v_x^2}\right)\frac{v_x^4 \cdot \tan^2\alpha}{g^2} + (\tan\alpha)\frac{v_x^2 \cdot \tan\alpha}{g} \Rightarrow y_{\max} = \frac{v_x^2 \cdot \tan^2\alpha}{2g}$$

Ved man hvor lang tid luftturen tager og dermed hvor lang tid partiklen falder, hvilket den jo gør i halvdelen af tiden, kan stighøjden også blot beregnes således:

$$y_{\max} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t\right)^2 = \frac{g \cdot t^2}{8}$$

Maraton

Tilsvarende kastebevægelsen vil en atlets tyngdepunkt bevæge sig under løb og i et længdespring. Luftmodstanden vil dog være betydeligt større for en atlet end for en partikel, men lad os alligevel bruge beskrivelsen af kastebevægelsen til at undersøge en løbers bevægelse under et maratonløb og beregne hans samlede tyngdeløft.



— Haile Gebrselassie´s tyngdeløft (*m*) i Berlin.

— En motionists tyngdeløft i Berlin (gennemførte på 4 timer med 160 skridt i minuttet).

Regneark

Da Haile Gebrselassie satte VR i Berlin 2008 løb han på 2:03:59 timer, dvs. 42195m på 7439 sek.

$v_x = \frac{42195m}{7439s} = 5{,}672\frac{m}{s}$ eller 20,4 km/t.

endvidere løb han med en skridtfrekvens på ca. 192 skridt i minuttet. Altså var hans skridtlængde

$$x = \frac{42195m}{124\,\text{min}\cdot 192\frac{skridt}{\text{min}}} = 1{,}772m$$

I Berlin er tyngdekraften (tyngdeaccelerationen) $g = 9{,}816\frac{m}{s^2}$.

Vi kan beregne vinklen α ved at indsætte $x = 1{,}772m$ i formlen for kasteviden (skridtlængden), $x = \frac{2v_x^2\cdot\tan\alpha}{g}$:

$$1{,}772m = \frac{2\cdot 5{,}672^2\frac{m^2}{s^2}\cdot\tan\alpha}{9{,}816\frac{m}{s^2}} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}0{,}2705 = 15{,}129^o$$

og heraf hastigheden i hans afsæt:

$$v_0 = \frac{5{,}672\frac{m}{s}}{\cos 15{,}129^0} = 5{,}876\frac{m}{s}$$ eller 21,2 km/t.

Vi kan nu beregne Haile Gebrselassie´s tyngdeløft $y_{\max} = \frac{v_0^2\cdot\sin^2\alpha}{2\cdot g} = \frac{5{,}876^2\frac{m^2}{s^2}\cdot\sin^2 15{,}129^o}{2\cdot 9{,}816\frac{m}{s^2}} = 0{,}120m$

Men var det alene tyngdeløftet vi var interesseret i, kunne vi også have bestemt det direkte vha. skridtfrekvensen:

$$y_{max} = \frac{9{,}816\frac{m}{s^2}\cdot\left(\frac{60s}{192\frac{skridt}{s}}\right)^2}{8} = 0{,}120m$$

Haile Gebrselassie´s samlede tyngdeløft under maratonløbet var således $= 0{,}120m \cdot 124\,\text{min} \cdot 192\frac{skridt}{\text{min}} = 2852m$.

Havde han været mere normal og blot taget 180 skridt i minuttet ville tyngdeløftet have været:

$$y_{max} = \frac{9{,}816\frac{m}{s^2}\cdot\left(\frac{60s}{180\frac{skridt}{s}}\right)^2}{8} = 0{,}136m$$

og hans samlede tyngdeløft $= 0{,}136m \cdot 124\,\text{min} \cdot 180\frac{skridt}{\text{min}} = 3245m$

En motionist som gennemførte løbet på 4 timer med denne skridtfrekvens ville så have et samlet tyngdeløft på:

$$0{,}136m \cdot 4 \cdot 60\,\text{min} \cdot 180\frac{skridt}{\text{min}} = 5890m$$

og hvis han/hun blot løb med 160 skridt i minuttet ville det være:

$$y_{max} = \frac{9{,}816\frac{m}{s^2}\cdot\left(\frac{60s}{160\frac{skridt}{s}}\right)^2}{8} = 0{,}173m$$

$$\Rightarrow 0{,}173m \cdot 4 \cdot 60\,\text{min} \cdot 160\frac{skridt}{\text{min}} = 6626m$$

Touchdown!

HUHA, man kan altså konkludere, at det er et betydeligt større arbejde at løbe et maraton på 4 timer end at løbe et på 2:03:59!
Arbejdet kan dog reduceres, hvis man øger skridtfrekvensen – **so speed up the rhythm!**

Vurdering

Ser man bort fra at løberen der tager flest skridt også har mest kontakt med jorden, vil to løbere som gennemfører et maraton på den samme tid, samlet befinde sig lige længe i luften! Skulle deres samlede tyngdeløft så ikke også være ens uanset skridtfrekvensen?
Nej, forklaringen er enkel. Analysen af kastebevægelsen er ikke nødvendig for at forstå skridtfrekvensens betydning for en løbebevægelse. Vi behøver kun at betragte tyngdeaccelerationen!
Lader vi f.eks. to partikler falde i et lufttomt rum og forestiller os, at vi kan afbryde deres fald et forskelligt antal gange. Hver gang en partikel så starter et fald vil dens hastighed accelerere fra 0 og indtil den standses igen. Det vil sige, at jo længere tid den får lov at falde jo højere hastighed vil den nå op på (max: $t \cdot g$, middel: $t \cdot g / 2$). Partiklen som afbrydes færrest gange i et givet tidsrum vil altså nå længst. Ligeså vil løberen, med lavest skridtfrekvens have højest tyngdeløft og mest arbejde med at løbe!

Vi kan altså hurtigt afgøre hvem der har det største arbejde, men skal vi vurdere arbejdet lidt mere præcist vil det være bedre at bestemme længden af parabelbuen, altså kurvelængden af tyngdepunktets bevægelse. Det kan vi gøre med følgende formel:

$$S = \frac{v_x^2}{g} \cdot ln\left(\frac{gL}{2v_x^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{gL}{2v_x^2}\right)^2}\right) + \frac{L}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{gL}{2v_x^2}\right)^2}$$

S = kurvelængden, L = skridtlængden. Ref.: *Bent Selchau*.

i så fald bevægede Haile's tyngtepunkt sig 42703m under maratonløbet i Berlin imod motionistens 44825m.

Fysik kan altså hjælpe os til at forstå fordelen ved at løbe med en høj skridtfrekvens. Kan den også hjælpe os til at forklare fordelen ved lange tynde underben?

Peder Troldborg, 14-6-2010